Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

<u>**Instrucciones**</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\frac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

---

1) **[20 ptos]** Resuelva, de manera clara y ordenada, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\sin^5(x)}{\cos^4(x)}\, dx$$

Ayuda : Recuerde que $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

2) **[20 ptos]** Resuelva, de manera clara y ordenada, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\, dx$$

3) **[20 ptos]** Resuelva, de manera clara y ordenada, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\, dx$$

Pauta de corrección:

1) $\displaystyle\int \frac{\sin^5(x)}{\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2(x))^2}{\cos^4(x)}\cdot \sin(x)\,dx = \int \frac{1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx$ **[5 pts]**

....

Sea $u=\cos(x) \Longrightarrow du = -\sin(x)\,dx$ **[2 pts]**

....

$$= -\int \left(\frac{1}{u^4}-\frac{2}{u^2}+1\right)du = \frac{1}{3u^3}-\frac{2}{u}-u+C = \frac{1}{3(\cos(x))^3}-\frac{2}{\cos(x)}-\cos(x)+C$$

[3 pts]

....

2) Integrando por partes:

$$u=\arctan(x) \Longrightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{dx}{x^2} \Longrightarrow v = -\frac{1}{x}$$

[3+2 pts]

....

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{dx}{x\cdot(1+x^2)}$$

[5 pts]

....

donde $\displaystyle \frac{1}{x\cdot(1+x^2)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2} \Longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$ **[2+3 pts]**

....

Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan(x)}{x^2} &= -\frac{\arctan(x)}{x} + \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx && \text{[2pts]}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C && \text{[3pts]}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C
\end{aligned}$$

3) Completando cuadrado

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x + 1 - 4) = -[(x-1)^2 - 4] = 4 - (x-1)^2$$

[3 pts]

....

y haciendo el cambio de variable

$$x - 1 = 2\sin\theta \Longrightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

[2 pts]

....

Obtenemos

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,dx = \int \frac{(2\sin\theta+1)^2}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\, d\theta \qquad [\mathbf{3pts}]$$

$$= \int (4\sin^2\theta + 4\sin\theta + 1)d\theta \qquad [\mathbf{2pts}]$$

$$= 4\int \frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta + 4(-\cos\theta) + \theta + C \qquad [\mathbf{3pts}]$$

$$= 2\theta - 2\frac{\sin 2\theta}{2} - 4\cos\theta + \theta + C \qquad [\mathbf{3pts}]$$

$$= 3\theta - 2\sin\theta\cos\theta - 4\cos\theta + C \qquad [\mathbf{2pts}]$$

$$= 3\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{x-1}{4}\sqrt{4-(x-1)^2} - 2\sqrt{4-(x-1)^2} + C \qquad [\mathbf{2pts}]$$